

УДК 519.95:519.872

**МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБЪЕКТОВ,
ИМЕЮЩИХ ВНУТРЕННИЕ СОСТОЯНИЯ,
С КОЛЛЕКТИВОМ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ АГЕНТОВ****О. Д. АСЕНЧИК, В. С. МУРАШКО***Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь***Введение**

Создание адекватных и имеющих приемлемую вычислительную сложность математических моделей стохастического движения агентов по системе центров с внутренней структурой актуально для многих прикладных областей науки и техники. Обслуживание стационарных объектов (нефтяных скважин, энергетических объектов и т. п.) передвижными бригадами [1], [2], когерентный и некогерентный перенос электронов, электронных возбуждений или квазичастиц в системе многоуровневых центров различной физической, химической или биологической природы [3]–[5], передача пакетов в компьютерных сетях [6] – некоторые примеры подобных областей.

Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую в некоторый момент времени из N обслуживаемых производственных объектов и M обслуживающих агентов ($N \geq M$).

Обслуживаемый объект может находиться в одном из трех состояний (рис. 1): в «основном» состоянии ожидания обслуживания – 0; в «метастабильном» состоянии, когда объект не требует обслуживания – 1; в «возбужденном» состоянии, когда на объекте находится агент и он обслуживается – 2. Возможные переходы между состояниями изображаются на рис. 1 сплошными стрелками. Специфичным является то, что переход $2 \rightarrow 1$ может индуцировать появление (высвобождение) агента, который перемещается к другому объекту, а переход $0 \rightarrow 2$ индуцируется агентом, пришедшим от другого объекта. Агент движется от объекта к объекту, при этом он может переходить только на объекты, находящиеся в состоянии ожидания обслуживания. Таким образом, объекты «взаимодействуют» между собой посредством обмена агентами.

Целью настоящей работы является разработка адекватных математических моделей для описания взаимодействия имеющих внутренние состояния объектов с коллективом обслуживающих агентов.

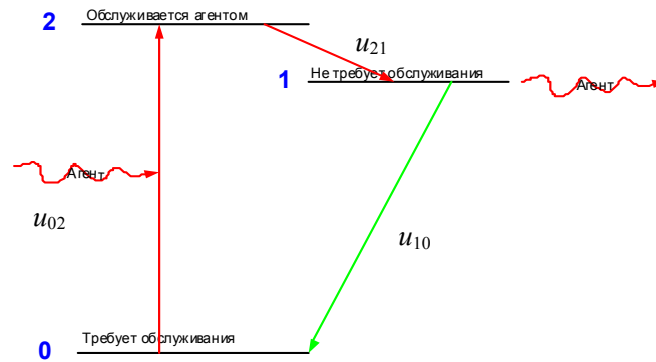


Рис. 1. Схема взаимодействия трехуровневого центра с «полем» агентов

Модель с фиксированным количеством агентов

Рассмотрим случай, когда количество агентов M , обслуживающих центры, постоянно. Множество состояний рассматриваемой системы будем описывать совокупностью векторов: $\{\vec{k}\} = \{k_1, k_2, \dots, k_N\}$, где k_i – номер состояния i -го объекта, $k_i = 0, 1, 2$; $i = \overline{1, N}$.

Все множество значений вектора \vec{k} можно разбить на три подмножества номеров объектов, находящихся в различных состояниях:

$$I^0 = \{i \mid k_i = 0, \quad i = \overline{1, N}\}, \quad I^1 = \{i \mid k_i = 1, \quad i = \overline{1, N}\}, \quad I^2 = \{i \mid k_i = 2, \quad i = \overline{1, N}\}.$$

Система дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова [7]) для функций $P(\vec{k}, t)$ -вероятностей реализации состояния \vec{k} в момент времени t , будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(\vec{k}, t) = & \sum_{i \in I^0} \left(- \sum_{j \in I^2} u_i^{0,2} w_{ij} P(\vec{k}, t) + u_i^{1,0} P(\vec{k} + \vec{l}_i, t) \right) + \\ & + \sum_{i \in I^1} \left(- u_i^{1,0} P(\vec{k}, t) + \sum_{j \in I^2} u_j^{2,1} w_{ji} P(\vec{k} + \vec{l}_i - 2\vec{l}_j, t) \right) + \\ & + \sum_{i \in I^2} \left(- \sum_{j \in I^1} u_i^{2,1} w_{ij} P(\vec{k}, t) + \sum_{j \in I^0} u_j^{0,2} w_{ji} P(\vec{k} - \vec{l}_i + 2\vec{l}_j, t) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$P(\vec{k}, 0) = \delta_{\vec{k}, \vec{k}_0}, \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}, t) = 1,$$

где \vec{l}_j – вектор той же размерности, что и вектор \vec{k} , у которого j -я компонента равна 1, а все остальные равны 0; $u_i^{q,r}$ – средняя скорость перехода из состояния q в состояние r для i -го объекта; w_{ij} – сетевая матрица, задающая относительную вероятность перехода агента с i -го на j -й объект [6], $\sum_{j=1}^N w_{ij} = 1$, $w_{ii} = 0$.

Первое слагаемое в (1) учитывает изменение вероятности $P(\vec{k}, t)$ вследствие переходов $0 \rightarrow 2$, предполагающих «захват» агентов, а также переходов $1 \rightarrow 0$, не затрагивающих изменения состояний соседних объектов. Второе слагаемое в (1) учи-

тывает изменения вероятности $P(\vec{k}, t)$ вследствие переходов $1 \rightarrow 0$, а также переходов $2 \rightarrow 1$, сопровождающиеся высвобождением агента. Третье слагаемое учитывает вклад переходов $2 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$.

Входящие в (1) параметры $u_i^{q,r}$, характеризующие i -й объект, можно интерпретировать следующим образом: $(u_i^{1,0})^{-1}$ – среднее время между плановыми обслуживаниями; $(u_i^{0,2})^{-1}$ – среднее время ожидания обслуживания; $(u_i^{2,1})^{-1}$ – среднее время обслуживания.

Модель с переменным количеством агентов

В общем случае в рассматриваемой системе число агентов необязательно должно быть постоянным: агенты могут выводиться из процесса обслуживания и приступать к нему вновь. Учитывая это, (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(\vec{k}, t) = & - \sum_{i \in I^0} G_i P(\vec{k}, t) + \sum_{i \in I^0} \left(- \sum_{j \in I^2} (1 - \varphi_i) u_i^{0,2} w_{ij} P(\vec{k}, t) + u_i^{1,0} P(\vec{k} + \vec{l}_i, t) \right) + \\ & + \sum_{i \in I^1} \left(- u_i^{1,0} P(\vec{k}, t) + u_i^{2,1} \varphi_i P(\vec{k} + \vec{l}_i, t) + \sum_{j \in I^2} (1 - \varphi_j) u_j^{2,1} w_{ji} P(\vec{k} + \vec{l}_i - 2\vec{l}_j, t) \right) + \\ & + \sum_{i \in I^2} G_i P(\vec{k} - 2\vec{l}_i, t) + \\ & + \sum_{i \in I^2} \left(- u_i^{2,1} \varphi_i P(\vec{k}, t) - u_i^{2,1} (1 - \varphi_i) \sum_{j \in I^1} w_{ij} P(\vec{k}, t) + \sum_{j \in I^0} (1 - \varphi_j) u_j^{0,2} w_{ji} P(\vec{k} - \vec{l}_i + 2\vec{l}_j, t) \right), \quad (2) \end{aligned}$$

$$P(\vec{k}, 0) = \delta_{\vec{k}, \vec{k}_0}, \quad \sum_{\vec{k}} P(\vec{k}, t) = 1,$$

где φ_i – вероятность ухода агента из системы после обслуживания объекта; G_i – средняя скорость появления нового агента на i -м объекте.

Первое и четвертое слагаемые описывают изменение вероятности текущего состояния заданного объекта вследствие того, что возможны переходы $0 \rightarrow 2$, сопровождающиеся «рождением» агента. Второе слагаемое по смыслу аналогично первому слагаемому в (1). Третье слагаемое несет ту же смысловую нагрузку, что и второе слагаемое в (1), только с учетом того, что после обслуживания объекта агент переходит на другой объект с меньшей на $1 - \varphi_i$ вероятностью. Пятое слагаемое описывает вклады переходов $2 \rightarrow 1$, сопровождающиеся высвобождением агента, который либо покидает систему («гибнет»), либо остается в системе, а также вклады переходов $0 \rightarrow 2$.

Модель взаимодействия многоуровневых центров с «полем» агентов

Для случая, когда можно пренебречь временными корреляциями между нахождением агентов на различных центрах, предлагается система самосогласованных нелинейных дифференциальных уравнений существенно меньшей размерности – $5N$. Данная модель подразумевает эффективные «взаимодействия» различных центров между собой посредством взаимодействия с единым «полем» агентов. Здесь прослеживается аналогия с моделью взаимодействия квантовых частиц с квантованным электромагнитным полем [8].

Уравнения для вероятности того, что i -й объект находится в состоянии k , имеют вид:

$$\dot{P}_i^k(t) = -\sum_{l=0}^2 u_i^{k,l} P_i^k(t) + \sum_{l=0}^2 u_i^{l,k} P_i^l(t), \quad (3)$$

где $k = 0, 1, 2$; N – число центров; $u_{i,l} = 0$, $i = \overline{1, N}$.

Для каждого i -го центра необходимо выполнение условия нормировки

$$\sum_{k=0}^2 P_i^k(t) = 1. \quad (4)$$

Обозначим через $p_m(t)$ вероятность того, что имеется m свободных агентов, не занятых обслуживанием центров. Тогда вероятность перехода $0 \rightarrow 2$, стимулированная взаимодействием с «полем» агентов, будет равна

$$u_i^{0,2} = \sum_{m=1}^M w_i p_m(t), \quad (5)$$

где $(w_i)^{-1}$ – параметр, связанный со средним временем ожидания обслуживания, $\sum_{m=1}^M p_m(t) = 1$.

Процесс изменения количества агентов – типичный процесс гибели и размножения [8]. Уравнения для вероятностей $p_m(t)$ имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \dot{p}_m(t) &= r_{m+1} p_{m+1}(t) + g_{m-1} p_{m-1}(t) - (r_m + g_m) p_m(t), \\ \sum_{m=0}^M p_m(t) &= 1. \end{aligned}$$

Для граничных точек процесса: $p_0 = g_{-1} = 0$, $r_{M+1} = g_M = 0$, для остальных m :

$$r_m = r = \sum_{i=1}^N u_{0,2}^i P_0^i + R; \quad (6)$$

$$g_m = g = \sum_{i=1}^N u_{2,1}^i P_2^i + G, \quad (7)$$

где R – скорость «ухода» из системы агентов; G – скорость «прихода» агентов в систему; $M = N$; r – средняя скорость «гибели» агента; g – средняя скорость «рождения» агента.

В стационарном случае ($\dot{p}_m = 0$) (3)–(7) сводятся к системе нелинейных уравнений:

$$u_{0,2}^i = w_i^i \frac{\sum_{m=1}^M \left(\frac{g}{r} \right)^m}{1 + \sum_{m=1}^M \left(\frac{g}{r} \right)^m},$$

$$-\sum_{l=0}^2 u_i^{k,l} P_i^k + \sum_{l=0}^2 u_i^{l,k} P_i^l = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{k=0}^2 P_k^k = 1.$$

Вероятности того, что все агенты заняты обслуживанием или есть m свободных агентов в стационарном случае примут соответственно следующий вид:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^M \left(\frac{g}{r}\right)^m}; \quad p_m = \left(\frac{g}{r}\right)^m p_0. \quad (9)$$

Нелинейность системы (8) относительно неизвестных P_k^i – это следствие зависимости $u_{0,2}^i$ от состояния «поля» агентов, которое, в свою очередь, зависит от состояний, в которых находятся объекты.

Случай фиксированного количества агентов, равного M , также может быть описан в рамках этой модели, если положить скорости «ухода» и «прихода» агентов в системе равными нулю ($R = G = 0$), а также потребовать выполнения условия сохранения количества агентов в системе:

$$\sum_{m=0}^M m p_m(t) + \sum_{i=1}^N P_i^2 = M. \quad (10)$$

Заключение

В настоящей работе описаны линейные математические модели (1) и (2) взаимодействия объектов, имеющих внутренние состояния, с коллективом агентов и нелинейная математическая модель (8) взаимодействия объектов с «полем» агентов.

Предложенные модели имеют различную вычислительную сложность. Количество уравнений в модели (1) с фиксированным количеством агентов равно $N_M = 2^{(N-M)} C_N^{(N-M)}$, а количество уравнений (2) с непостоянным количеством агентов равно $\sum_{M=0}^N N_M$. Это линейные дифференциальные уравнения или просто линейные

уравнения в стационарном случае. Реализация таких моделей является трудоемкой вычислительной задачей. В предложенной нелинейной модели (8) количество уравнений существенно меньше – $5N$ уравнений, из которых только N нелинейных.

Предложенные математические модели можно использовать: в системах поддержки принятия решений; для диспетчерского управления; для составления долгосрочных и краткосрочных графиков обслуживания; для задач оптимизации размещения новых объектов, количества привлекаемых бригад и т. п.

Литература

1. Мамчистова, Е. И. Теоретические основы оптимального распределения ремонтных бригад для технического обслуживания и ремонта скважин / Е. И. Мамчистова // Моделирование технологических процессов нефтедобычи: сб. науч. тр. – Тюмень: Вектор-Бук, 2003. – Вып. 4. – С. 157–161.

2. Система технического обслуживания и планового предупредительного ремонта энергетического оборудования и сетей промышленной энергетики / сост. А. С. Овчинников. – Минск : Дизайн ПРО, 2007. – 687 с.
3. Агранович, В. М. Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах / В. М. Агранович, М. Д. Галанин. – Москва : Наука, 1978. – 383 с.
4. Багнич, С. А. Миграция триплетных возбуждений сложных молекул в неупорядоченных средах и в системах с ограниченной геометрией / С. А. Багнич // Физика твердого тела. – 2000. – Т. 42, вып. 10. – С. 1729–1756.
5. Light-Harvesting Antennas in Photosynthesis. Series: Advances in Photosynthesis and Respiration (Vol. 13) / Eds.: Green B.R., Parson W.W. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 544 p.
6. Вишневский, В. М. Теоретические основы компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – Москва : Техносфера, 2003. – 512 с.
7. Кампен, Ван. Стохастические процессы в физике и химии / Ван Кампен. – Москва : Высш. шк., 1990. – 376 с.
8. Гардинер, К. В. Стохастические методы в естественных науках / К. В. Гардинер. – Москва : Мир, 1986. – 528 с.

Получено 03.11.2008 г.